数理解析研究所講究録
263巻 1976年 95-135

アブストラクト

阪大 理　山崎洋平

本稿では§1. に述べるようなゲーム"Hex"を一般化して論じる。このゲーム"Hex"は次のような性質をもつ。

1). 二人の競技者による有限ゲーム……更に、変化が有限個のゲーム……である。

2). いかなる変化に対しても勝者、敗者が定まる。

3). 先手必勝の原理が成り立つ。

これらの性質のうち上の二つに注目して拡張した"Division game"を次のような順で論じる。

Hex (= Nash game) の一般化
……… その理論と実例．

阪大・理　山崎洋平

§1.　はじめに．

図1

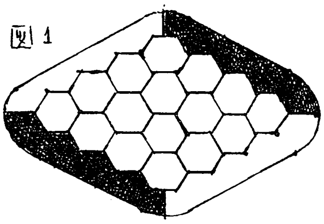
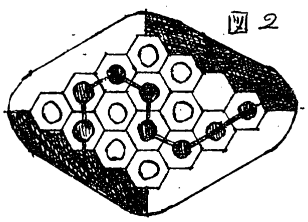


図2



左図のような盤の六角形（この場合4×4個）の中に，白と黒が交互に碁石を打ち合っていき，両端の白陣を結ぶ白石の列………隣りあった六角形に位置する白石の列………ができれば白の勝ちとし，逆に両端の黒陣を結ぶ黒石の列ができれば黒の勝ち，とすれば"最終的には一方のみが勝つ"ようなゲームができる．この六角形の中点を結んで図3のような盤にし線の交わるところに石を打ち合っても本質的に同じである．また陣地を点にして，図4としても全く同じことである．このゲームを4×4のHex（Nash game，連結ゲームの名もある）と

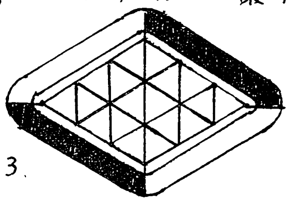


図3

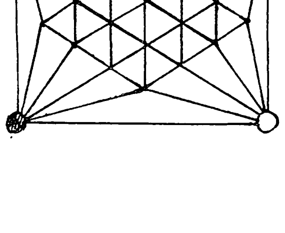


図4

いい，同様にして，すべての自然数nに対して$n \times n$のHex ……
……$\mathcal{H}_n$とかく……が定義される．

11月19日の集会では，これを一般化して"Connex"として論じたが，その定義はいさゝか泥臭く，ここに新たな体裁をもって書き改められることになった．その結果はからずも，大げさともみえる程抽象的になったことをお許し願いたい．また"Connexの理論"は，更に一般的に"Division gameの理論"として，ここに論ぜられることになった．

§2．　Connex．Division space．

本稿で用いる用語のうち念の為，次の二つを断っておく．即ち，A，Bを集合とするとき，

$|A|$ ………… Aの濃度（有限集合ではその個数）

$Map(A, B)$ …… AからBへの写像の全体

とおく．

$\mathbb{P}$を4点からなる集合，$\mathbb{M} = \{\mathbb{a}, \mathbb{b}\}$を集合とし，fixする．$\mathbb{M}$のinvolutionを$\wedge$とおく，即ち$\hat{\mathbb{a}} = \mathbb{b}$，$\hat{\mathbb{b}} = \mathbb{a}$である．……
以下$\mathbb{M}$の元を一般的に$\mathbb{m}$で表すことにする．

Definition．　$\mathcal{C} = (X\,;\,p,\,\Phi)$がconnexであるとは，次の1)，2)，3)，4)をみたすことをいう．

1). X は P と交わらない有限集合である．

…… 以下，$\tilde{X} = X \cup P$ とおく

2). p は $P \longrightarrow \mathbb{M}$ なる写像で，$|p^{-1}(\mathfrak{m})| = 2$ である．

…… 以下，$p^{-1}(\mathfrak{m}) = P_{\mathfrak{m}} = \{m, \bar{m}\}$ とおく．ここに $\mathfrak{m}$ が実際に $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ で与えられた時，$\mathfrak{m}$ の文字はそれぞれ a, b に書き改められるものとする．

3). Ψ は $\mathbb{M} \longrightarrow \mathcal{M}ap(\tilde{X} \times \tilde{X}, \{0,1\})$ なる写像で，各 $\mathfrak{m}$ に対し $\Psi(\mathfrak{m})$ を $\psi_{\mathfrak{m}}$ とおくと，次の三条件をみたす．

i) $\psi_{\mathfrak{m}}(u, u) = 1 \qquad {}^{\forall}u \in \tilde{X}$

ii) $\psi_{\mathfrak{m}}(u, v) = \psi_{\mathfrak{m}}(v, u) \qquad {}^{\forall}u, v \in \tilde{X}$

iii) $\psi_{\mathfrak{m}} \big| P_{\mathfrak{m}} \times P_{\hat{\mathfrak{m}}} = 1$

4). $$\mathfrak{D} = \{ D : \mathbb{M} \longrightarrow 2^X \mid \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathbb{M}} D(\mathfrak{m}) = \phi,\ \bigcup_{\mathfrak{m} \in \mathbb{M}} D(\mathfrak{m}) = X \}$$

とおくとき，$\mathfrak{D}$ の各元 D に対し次のような $\mathfrak{m}$ が唯一つ存在する．

$${}^{\exists}\{u_i ; 0 < i < n\} \subset D(\mathfrak{m}) \qquad u_0 = m \qquad u_n = \bar{m}$$

$$\text{s.t.} \qquad \psi_{\mathfrak{m}}(u_{i-1}, u_i) = 1 \qquad 1 \leq {}^{\forall}i \leq n$$

$\mathcal{C}$ が connex のとき，$\mathfrak{D}$ の各元 D に上の条件 4). における $\mathfrak{m}$ を対応させる写像を χ^+，$\wedge \circ \chi^+$ を χ^- とおく．今，新たな対象として $\mathcal{C}^+ = (X ; \chi^+)$，$\mathcal{C}^- = (X ; \chi^-)$ が出現するが，これら二つを一般化して次のような対象 $\mathcal{C}^*$ が定義される．

Definition.　X を有限集合，$\mathcal{X}^*: \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{ML}$ を写像とするとき，$\mathfrak{D}^* = (X\,;\,\mathcal{X}^*)$ を division space という．また，$\widehat{\mathfrak{D}}^* = (X\,;\,\widehat{\mathcal{X}^*})$ …… 但し $\widehat{\mathcal{X}}^*(D) = \widehat{\mathcal{X}^*(D)}$ とおく …… をその dual space という．

Definition.　Division space $\mathfrak{D}^*$ は $D(\mathrm{DHL}) \supset D'(\mathrm{DHL})$ なる D, D' に対し常に 1) のとき regular，常に 2) のとき misère であるという。

1).　$\mathcal{X}^*(D') = \mathrm{DHL} \Longrightarrow \mathcal{X}^*(D) = \mathrm{DHL}$

2).　$\mathcal{X}^*(D) = \mathrm{DHL} \Longrightarrow \mathcal{X}^*(D') = \mathrm{DHL}$

Proposition.(2・1).　$\mathcal{C}$ を convex とするとき $\mathcal{C}^+$, $\mathcal{C}^-$ はそれぞれ regular，misère の convex である．

―――――― 証明略 ――――――

Division space は必ずしも regular，misère のどちらかであるとはいえないが，そのような場合はそれぞれ $\mathfrak{D}^+, \mathfrak{D}^-$ とかく．また，以後あらゆる“ところ”で $+$ と $-$ を一括して論じることがあるが，それが可能な時は $\pm$ という記号を用いる．

Definition.　$\mathfrak{D}^*$ が regular 且つ misère であるのは $\mathcal{X}^*$ が constant であることと同値である，このとき $\mathfrak{D}^*$ は trivial であるという．また convex $\mathcal{C}$ は，$\mathcal{C}^\pm$ が trivial のとき trivial であるという．

Definition. Division space $\mathcal{D}^*$ において，X の部分集合 N が negligible であるとは，$\mathfrak{D} \ni {}^\forall \mathfrak{d}$ に対し

$$\mathfrak{d}'(a) = \mathfrak{d}(a) \cup N$$

$$\mathfrak{d}'(b) = \mathfrak{d}(b) - N$$

なる $\mathfrak{d}'$ をつくる時，すべての $\mathfrak{d}$ に対して

$$\chi^*(\mathfrak{d}') = \chi^*(\mathfrak{d})$$

が成り立つことをいう．また，connex $\mathcal{C}$ に対しても，$\mathcal{C}^\pm$ における negligible set を $\mathcal{C}$ の negligible set という．

Proposition (2.2). $\mathcal{D}^*$ を division space とするとき，次のような $N (\subset X)$ が存在する．

$$X \supset N' \text{ が negligible } \Longleftrightarrow N' \subset N$$

――――証明略――――

§3. Free connex, Essencially plane connex.

Definition. Connex $\mathcal{C} = (X; p, \Psi)$ は次の条件をみたすとき free であるという．

$$\Psi(\mathfrak{m}) = \Psi(\hat{\mathfrak{m}})$$

このようなとき $\psi = \Psi(\mathfrak{m}) (= \Psi(\hat{\mathfrak{m}}))$ とおくことにする．

Theorem 1. $[0,1]^2$ の四隅を正の方向に順に ⓐ, ⓑ, $\bar{a}$, $\bar{b}$ として，辺に頂点を持たないように単体分割する．隅以外の頂点から成る disjoint な二つの集合 A, B をとり，残りの頂点の全体を X とする……… 例によって A, B を一般的に M で表す．

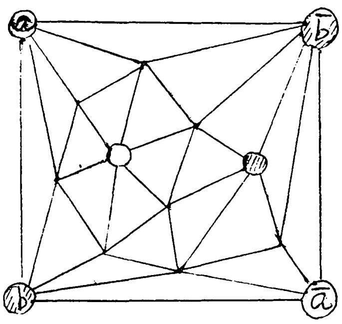


図 5

今，$P=\{a,\bar{a}; b,\bar{b}\}$ とおき，p と Ψ を次のように定める．

$$p(m) = \begin{cases} a \cdots m = a \text{ 又は } \bar{a} \text{ のとき} \\ b \cdots m = b \text{ 又は } \bar{b} \text{ のとき.} \end{cases}$$

$$\psi_{m}(u,v)$$

$$= \begin{cases} 1 \cdots\cdots \text{“} \exists\{u = m_0, m_1, \cdots, m_n = v\} \ \text{s.t.} \\ \qquad m_i \in M \quad 0<i<n, \\ \qquad 1 \le {}^\forall i \le n \text{ に対し，} m_i \text{ と } m_{i-1} \text{ が 1-単体} \\ \qquad \text{を共有している” 場合} \\ 0 \cdots\cdots \text{その他} \end{cases}$$

このようにして得られる $\mathcal{C} = (X; p, \Psi)$ は Connex である．

我々の目的は A, B, S が与えられた時に $\mathfrak{m}_0$ から $\bar{\mathfrak{m}}_0$ までの道を $M \cup S(\mathfrak{m}_0)$ 内にとれる者 $\mathfrak{m}_0 = \chi^+(S)$ を求めることにあるが，そういう $\mathfrak{m}_0$ は "Jordanの曲線定理" から高々一つである。従って存在をいえばよい．今 M の代りに $M \cup S(\mathfrak{m})$，S の代りに各 $\mathfrak{m}$ に対し $S_\phi(\mathfrak{m}) = \phi$ なる S_ϕ が与えられている，としてよい。このとき，もし $\Psi_a(a, \bar{a}) = 1$ なら $\chi^+ = a$ である。もし $\Psi_a(a, \bar{a}) = 0$ なら，

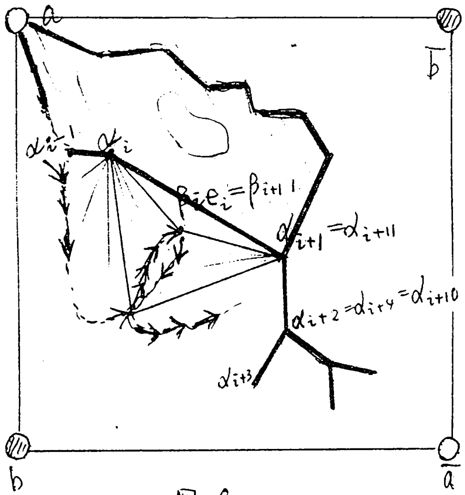


図 6

$P_a \cup A$ の a を含む連結成分内の，外部領域 $\mathcal{O}$ に沿った正の向きの列：$a = \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n = \bar{a}$（当然重複を許す，更に形式的に $\bar{b} = \alpha_{-1}$，$\alpha_{n+1} = \bar{b}$）に対し，各 $i\ (0 \leq i \leq n)$ について $\alpha_{i-1}\ (= \beta_{i0})$ から $(\beta_{ie_i} =)\ \alpha_i$ まで α_i のまわりを順に $\mathcal{O}$ 内で巡る列 $\beta_{i1}, \cdots, \beta_{ie_i-1}$ がとれるが，$b = \beta_{00};\ \beta_{01}, \cdots, \beta_{0e_0-1} = \beta_{11}, \cdots, = \beta_{n1}, \cdots;\ \beta_{ne_n} = \bar{b}$ は $P_b \cup B$ の中の列なので $\Psi_b(b, \bar{b}) = 1$，よって $\chi^+ = b$ である。

Definition.　上の方法で得られる connex を plane connex という。特に $A = B = \phi$ なる与え方の時 initial plane connex という。

Remark.　Initial plane connex は free。

Definition. 二つの connex $\mathcal{C}=(X:p,\Psi)$, $\mathcal{C}'=(X':p';\Psi')$ が次の関係をみたすとき，$\mathcal{C}$ は $\mathcal{C}'$ の上の connex であるという。

1). $X \supset X'$

2). $p = p'$

3). $\psi_m|_{X'\times X'} = \psi'_m \qquad \forall m \in M$

Remark. このとき $X-X'$ は $\mathcal{C}$ の negligible set である．

Definition. plane connex の上の connex を essenially plane connex という．

Example. 碁盤の上に図7のように石を配置して連結を競うゲームがあるが，これは図8のような plane connex と同じになることが容易に知れる．

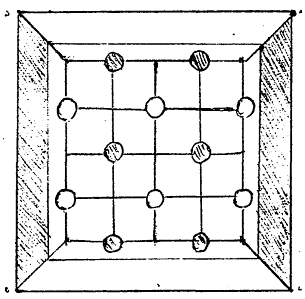


図 7

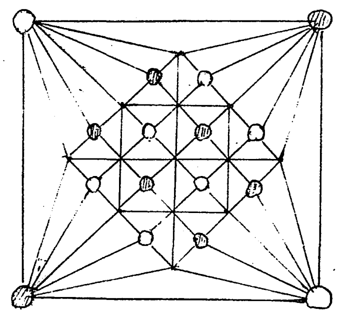


図 8

この例によって"Connex は本質的には平面的なものに限られるのではないか"という疑問が生じる．これについて考える前に，次の節で，まず"同型"について論じよう．

No. 8

§4. 同型

Definition. $\mathcal{F}=(f,\ \mathrm{sgn}\,F)$ が二つの connex $\mathcal{C}=(X;p,\Psi)$ から $\mathcal{C}'(X';p',\Psi')$ への pseudo-isomorphism であるとは，f 及び $\mathrm{sgn}\,F$ が次の図式を可換となす bijection であることをいう．($f:\tilde{X}\longrightarrow\tilde{X}'$, $\mathrm{sgn}\,F:\mathbb{M}\longrightarrow\mathbb{M}$).

$$\begin{tikzcd} f\ :\ P \arrow[r] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & P \arrow[d, "p'"] \\ \mathrm{sgn}\,F :\ \mathbb{M} \arrow[r] & \mathbb{M} \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} f\times f:\ \tilde{X}\times\tilde{X} \arrow[rr] \arrow[dr, "\Psi(m)"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \tilde{X}'\times\tilde{X}' \arrow[dl, "\Psi'(m^{\mathrm{sgn}F})"] \\ & \{0,1\} & \forall m\in\mathbb{M} \end{tikzcd}$$

また特に $\mathrm{sgn}\,F=i_{\mathbb{M}}$ のとき isomorphism，$\mathrm{sgn}\,F=\wedge$ のとき anti-isomorphism という．isomorphism $(f,\mathrm{sgn}\,F)$ は更に $f|_P=i_P$ のとき strong-isomorphism という．

Remark. 一般に connex は $\Psi_m|_{P_a\times P_b}=1$ をみたすから，右図にみるように

$$|p^{-1}(m)\cap p'^{-1}(m)|=0 \text{ 又は } 2$$

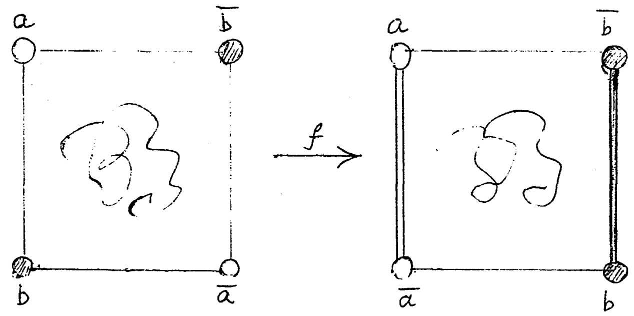


図 9

でなければならない．例えば $f(a)=a$　$f(b)=\bar{a}$ なら

$$\Psi_m(a,b)=\Psi'_{m^{\mathrm{sgn}F}}(a,\bar{a})=1$$

となり $\mathcal{C}'=(X';p',\Psi')$ が connex なることに反する．

Definition. $\mathcal{C}=\mathcal{C}'$ のとき isomorphism (resp. pseudo-, strong) のことを automorphism (resp. pseudo-, strong) といい、それぞれのなす群を $\mathrm{Aut}_{M_{II}}(\mathcal{C})$ (resp. $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Aut}_{P}(\mathcal{C})$) とかく。

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{C}) \supset \mathrm{Aut}_{M_{II}}(\mathcal{C}) \supset \mathrm{Aut}_{\underline{P}}(\mathcal{C}).$$

pseudo-automorphism F が $f|_{\underline{P}} = i_{\underline{P}}$ をみたせば, $p=p'$ であることと併せて $\mathrm{sgn}\,F = i_{M_{II}}$ が必然的にでてくる。

Proposition (4.1). $\mathrm{Aut}_{\underline{P}}(\mathcal{C})$ は $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ の正規部分群であり、また右の図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & D_{2\cdot 4} = \langle\sigma\rangle \wr \langle\tau_{P_a}\rangle = \langle\sigma\rangle \wr \langle\tau_{P_b}\rangle \arrow[dash, d] \arrow[dash, dl] \\
\mathrm{Aut}(\mathcal{C})/\mathrm{Aut}_{\underline{P}}(\mathcal{C}) \arrow[dash, d] & \langle\tau_{P_a}\rangle \oplus \langle\tau_{P_b}\rangle \arrow[dash, dl] \\
\mathrm{Aut}_{M_{II}}(\mathcal{C})/\mathrm{Aut}_{\underline{P}}(\mathcal{C}) \arrow[equal, d] & \\
\left(\mathrm{Aut}(\mathcal{C})/\mathrm{Aut}_{\underline{P}}(\mathcal{C})\right) \cap \left(\langle\tau_{P_a}\rangle \oplus \langle\tau_{P_b}\rangle\right) &
\end{tikzcd}$$

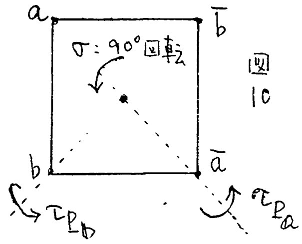


図10

但し、ここに σ は 90°回転 $a \to b \to \bar{a} \to \bar{b} \to a$、また τ_{P_a} は P_a を τ_{P_b} を P_b を点ごとに固定する反転写像である。

—— 証明略 ——

Proposition 4.2. $\mathcal{C}$ が initial plane connex とする。このとき、次の式が成り立つ。

$$\mathrm{Aut}_{\underline{P}}(\mathcal{C}) = \{ i_{X} \}$$

―――― 証明 ――――

$|X|$について induction で示そう。

i) $|X|=0$ のとき正しい。

ii) $|X|\leq N$ に対して正しいとする。今、$|X|=N+1$ なる

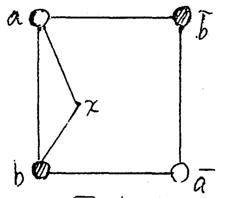


図 11

initial plane connex と とその strong automorphism γ が与えられているとする。$|X|\geq 1$ であるから、a と b を頂点とする 2-単体(即ち最小の三角形)のもう一つの頂点 x, 又は $\bar{a}$ と $\bar{b}$ を頂点とするもののもう一つの頂点が X に属する。簡単の為 $x\in X$ とする。

今 $p\in P$ に対し $U_p=\{x\in X \mid \psi_{\alpha\alpha\alpha}(p,x)=1, \forall\alpha\alpha\alpha\in\Lambda\Omega\}$ とおくと $x\in U_a\cap U_b$ であるが、同様に $x^\gamma\in U_a\cap U_b$ でなければならない。もし $x^\gamma\neq x$ なら右図のように x^γ から $\bar{a}$ 又は $\bar{b}$ に達する $X-\{x\}$ 内の列が得られるが、その γ による像は x^γ を含まないので $\bar{a}$ にも $\bar{b}$ にも達しない。従って $x^\gamma=x$ でなければならない。ここで、a, x を頂点とする(しかも b を頂点としない)最大の三角形を考え、そのもう一つの頂点を y_a, 内部の X の点を S_a とおく。同様に b, x を頂点とするものに対して y_b, S_b を定義する。ここに、$y_a=y_b$ であったり、$y_*\in P$ であったりすることは構わないが、$S_a\cap S_b$ は空でなければ

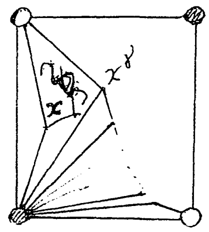


図 12

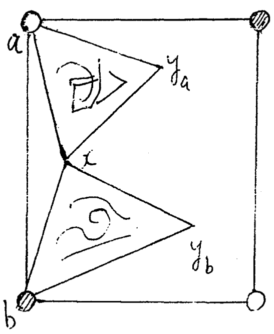


図 13

ならないことは容易に知れる．前と同じ論法で $\{y_a\}$，$\{y_b\}$ S_a，S_b は集合として γ－不変であることが知れる．今，新たな connex $\mathcal{C}_a = (X_a ; p_a, \Phi_b)$ を次のように定める．

$$X_a = X - S_a - \{x\}$$

$$p_a = p$$

$$\Phi_{a(mn)}\Big|_{(X_a - \{a\}) \times (X_a - \{a\})} = \Phi_{(mn)}\Big|_{(X_a - \{a\}) \times (X_a - \{a\})}$$

$$\Phi_{a(mn)}(a, u) = \Phi_{a(mn)}(u, a)$$

$$= \max\left(\Phi_{(mn)}(a, u), \Phi_{(mn)}(x, u)\right).$$

こう置くと $\mathcal{C}_a$ は，a と x を同一視し S_a を取り除いた initial plane connex である．同様に ~~$\mathcal{C}$~~ $\mathcal{C}_b$ を作る．このとき $\{y_a\}$，$\{y_b\}$，S_a，S_b が γ－不変なことから γ は $\mathcal{C}_a$，$\mathcal{C}_b$ の strong isomorphism をひきおこすがこれは induction の仮定から i_{X_a}，i_{X_b} である．即ち，γ は $X - S_a - \{x\}$，$X - S_b - \{x\}$ 上で一点ごとに不変である．従って $X - \{x\}$ 上不変な為，

$$\gamma = i_{\tilde{X}}$$

である．

Q. E. D.

この証明は一見 plane connex 一般に適用されるかに見える．しかし A，B の元は $\tilde{X}$ の"点"ではないので γ の関知す

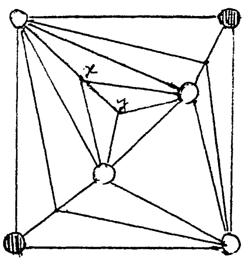


図 14

ることではない．事実 plane connex が偶然 free であってさえも右図のように $\mathrm{Aut}_p(\mathfrak{C}) \neq \{i_{\mathfrak{X}}\}$ なることがある（$x \longleftrightarrow y$ なるものが存在する）．$\mathfrak{C}$ が free であって non-empty negligible set を持たないときは initial plane connex に同型になり $\mathrm{Aut}_p(\mathfrak{C}) = \{i_{\mathfrak{X}}\}$ である．

Definition. $F=(f,\ \mathrm{sgn}\,F)$ が division space $\mathscr{D}^*=(\mathfrak{X};\mathfrak{X}^*)$ から $\mathscr{D}'^*=(\mathfrak{X}';\mathfrak{X}'^*)$ への pseudo-isomorphism であるとは，下の図式が可換なることをいう．

$$
\begin{tikzcd}
f:\ \mathfrak{D} \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{X}^*"'] & \mathfrak{D}' \arrow[d, "\mathfrak{X}'^*"] \\
\mathrm{sgn}\,F:\ \mathbb{M} \arrow[r] & \mathbb{M}
\end{tikzcd}
$$

また $\mathrm{sgn}\,F = i_{\mathbb{M}}$ のとき isomorphism という．$\mathscr{D}^* = \mathscr{D}'^*$ のとき pseudo-automorphism, automorphism といい下の群が得られる．

$$\mathrm{Aut}(\mathscr{D}^*) \supset \mathrm{Aut}_{\mathbb{M}}(\mathscr{D}^*)$$

Definition. Connex $\mathcal{E}$ に対し下の完全系列が得られる．これが $\cdots \to \{1\}$ まで完全系列のとき，$\mathcal{E}$ は normal であるという．ここに $\mathrm{Aut}_{X/\mathbb{M}}(\mathcal{E}) = \{ \gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{M}}(\mathcal{E}) \mid x^{\gamma} = x \quad \forall x \in X \}$ である．

$$\{1\} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{X/\mathbb{M}}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{E}^{\pm}) \cdots \to \{1\}.$$

Proposition (4・3). $\mathcal{H}_n$，及び後述の $\mathcal{H}_{n-1,n}$ は normal である．

―――― 証明概要 ――――

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3 \cdots\}$，$K = \{\kappa : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{Z}_+\}$ とおく．K のえ κ に対し height $h^{\kappa} : X \longrightarrow Map(\mathbb{M}, \mathbb{Z}_+) (= K)$ を次のように定める（一般の $\mathcal{D}^*$ に対して）．

$$h^{\kappa}(x)(\mathfrak{m}) = \left| \{ D \in \mathfrak{D} \mid D(\mathfrak{m}) \ni x,\ |D(\mathfrak{m})| = \kappa(\mathfrak{m}) \quad \chi^*(D) = \mathfrak{m} \} \right|$$

κ_0 として次のようなものを考える．

$$\kappa_0(\mathfrak{m}) = \begin{cases} \min\limits_{D \in \mathfrak{D},\, \chi(D) = \mathfrak{m}} \{ |D(\mathfrak{m})| \} & \cdots\cdots \{D \in \mathfrak{D},\ \chi(D) = \mathfrak{m}\} \neq \phi \\ |X| + 1 & \cdots\cdots\cdots \{ \qquad \} = \phi \end{cases}$$

$\mathcal{D}^* = \mathcal{H}_n^{\pm}$ のときは対角線上では $h^{\kappa_0}(x)(\mathfrak{m}) = 2^{n-1}$，その他では $h^{\kappa_0}(x)(\mathfrak{m}) < 2^{n-1}$ であり，$h^{\kappa_0}(x) = h^{\kappa_0}(y) \longleftrightarrow x = y$ or $x^2 = y$ である．また $\mathcal{D}^* = \mathcal{H}_{n-1\,n}^{\pm}$ でも，$h^{\kappa_0}(x) = h^{\kappa_0}(y) \longleftrightarrow x = y$ or $x^2 = y$ が任意の点の間に成立する．このことから $\mathrm{Aut}(\mathcal{E}^{\pm})$ が $\iota\tilde{x}$ 及で ι のみから得られることが簡単に知れる．

§ 5.　平面化定理

Theorem 2.　Free connex $\mathcal{C}$ は，ある plane connex $\mathcal{C}'$ の上の essencially plane connex に同型である．

1).　$X - X' = \cup N_\nabla$ …… ここに和は $\mathcal{C}'$ の 2-単体をわたる．

2).　$\psi = \psi_a = \psi_b$ とおくとき $u \in N_\nabla$，$v \in \hat{X}$ に対し

$$\psi(u, v) = 1 \implies v \in \nabla \cup N_\nabla$$

——— 証明 ———

$|X|$ について induction で示そう．

i).　$|X| = 0$ のとき明白である．

ii).　$|X| \leqq N$ のとき正しいとしよう．今 $|X| = N + 1$ としよう．Proposition (4.2) にみたように $U_a \cap U_b \neq \phi$ としてよい．その一点を x とおこう．a と x を同一視して Ψ_a を次のようにおくと再び free connex が得られる．($\mathcal{C}_a = (X - \{x\}; p, \Psi_a)$)

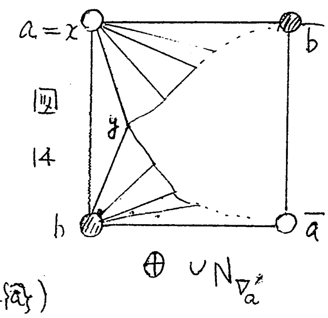


図 14

$$\Psi_a(m) \Big|_{(\hat{X} - \{a\}) \times (\hat{X} - \{a\})} = \Psi(m) \Big|_{(\hat{X} - \{a\}) \times (\hat{X} - \{a\})}$$

$$\Psi_a(m)(a, u) = \Psi_a(m)(u, a)$$

$$= \max\{\Psi(m)(a, u), \Psi(m)(x, u)\}$$

この $\mathcal{C}_a$ は induction の仮定からある $\mathcal{C}'_a$ の上の essencially plane connex である．ここに $\mathcal{C}'_a$ の negligible set は ϕ の

みであるとしてよい．$\mathcal{C}'_a=(X'_a; p, \Phi'_a)$ とおいて，これに対して U_a, U_b を考えると，もし $U_a\cap U_b=\phi$ なら $\mathcal{C}'_a$ が trivial になるので $\mathcal{C}$ がもとめる性質をもつことが容易に知れる．今，$U_a\cap U_b\ni y$ としよう．U_a は y から $\bar{b}$ への，U_b は y から $\bar{a}$ へのそれぞれ X 内の列であり，また $U_a\cap U_b=\{y\}$ であることが $\mathcal{C}'_a$ に non-empty negligible set がないことからわかる．これに基づいて $X'_a-\{a\}$ の点，a, x を $\mathcal{C}$ のグラフに於いて描いてみよう．まず y は a 又は x と，且つ b とも 1-単体を別個に共有する．$U_a-\{y\}$ の点は a 又は x のみと，$U_b-\{y\}$ の点は b のみと 1-単体を共有する．$\mathcal{C}$ のグラフに於て図15のように交叉する部分があれば a から $\bar{a}$ への $\mathfrak{A}$ の列と，b から $\bar{b}$ への $\mathfrak{B}$ の列が両立できることになり connex ではなくなる．従って交叉はない筈である．

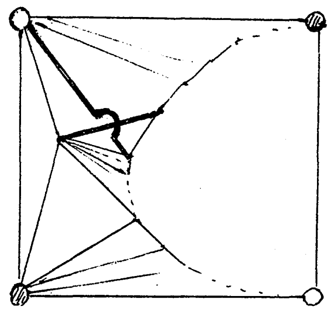


図 15

また U_a の点がすべて x 又は a と 1-単体を共有するので

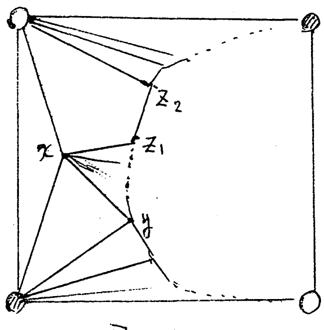


図 16

図16のようになっている筈である．ここに $z_1=z_2$ などであることは差しつかえない．$\mathcal{C}_a$ における ∇_a のうち $\mathcal{C}$ では単体でないものから来るものは $\square\, a x z_1 z_2$ の他は，$\triangle\, a x *$ ($*=b$ 又は $*=z_1=z_2$) とそれに隣接する単体との和のみである．これらのうち $\square\, a x z_1 z_2$ 以外では，$N_\square$ が二

つの単体の上の negligible sets $N_{\nabla_1}, N_{\nabla_2}$ に分解されねばならない。今 $z_1 = z_2$ であれば求める結果は既に明白である。ここで $\mathfrak{C}_a$ における $N_{\nabla_{a z_1 z_2}}$ を $\mathfrak{C}$ において $X_\square$ とかく。今，$\mathfrak{C}_\square = (X_\square ; p, \Psi_\square)$ を次のように定めると connex である。

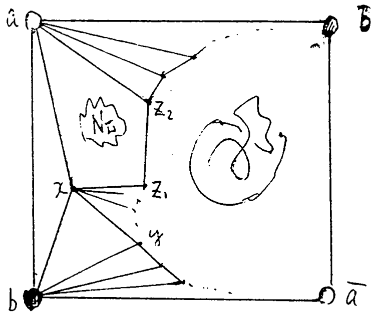


図 17

これは図18のものと同型である。

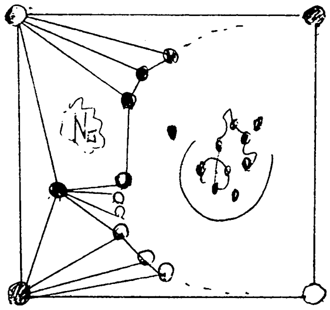


図 18

$$\Psi_\square(m)(x_1, x_2) = \Psi(m)(x_1, x_2) \qquad x_1, x_2 \in X_\square$$

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_\square(m)(x_1, a) &= \Psi_\square(m)(a, x_1) = \Psi(m)(a, x_1) \\
\Psi_\square(m)(x_1, b) &= \Psi_\square(m)(b, x_1) = \Psi(m)(x, x_1) \\
\Psi_\square(m)(x_1, \bar{a}) &= \Psi_\square(m)(\bar{a}, x_1) = \Psi(m)(z_1, x_1) \\
\Psi_\square(m)(x_1, \bar{b}) &= \Psi_\square(m)(\bar{b}, x_1) = \Psi(m)(z_2, x_1)
\end{aligned}\right\} \quad x_1 \in X_\square$$

これによって $\mathfrak{C}_\square$ は free connex となるが

$$|X_\square| \le |X - \{x\}| < |X|$$

なので induction の仮定より、$\mathfrak{C}_\square$ は essencially plane connex である。これによって $\mathfrak{C}$ を，ある plane connex の上の essencially plane connex として表すことはたやすい。証明おわり。

No. 17

Example

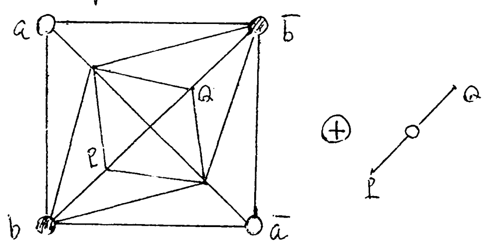


図19

図19のような連結状態の$|X|=5$のspaceはconnexとなるが

$$\psi_a(P,Q)=1$$

$$\psi_b(P,Q)=0$$

なのでconnexとしてはessencially plane connexに同型ではないが、division spaceとしては同型であるものが存在する。

Free connex, essencially plane connex, connexの同型類の全体を、それぞれFree, Ess, Connで、またこれらから得られるdivision spaceの同型類全体を$Free^{\pm}$, $Ess^{\pm}$, $Conn^{\pm}$で表す。またdivision spaceの同型類全体をDiv^{*}で表すと

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d] & Free \arrow[r, hook, "①"'] \arrow[d] & Ess \arrow[r, hook, "②"'] \arrow[d] & Conn \arrow[d] & \\
\mathcal{C}^{\pm} & Free^{\pm} \arrow[r, hook, "①^{\pm}"'] & Ess^{\pm} \arrow[r, hook, "②^{\pm}"'] & Conn^{\pm} \arrow[r, hook, "③^{\pm}"'] & Div^{\pm}
\end{tikzcd}$$

なる図式が得られる。$①^{\pm}$及び$③^{\pm}$については後記のように$=$でない例があるが、$②^{\pm}$については良くわからない。わかっていることは$|X|\leqq 5$の場合はすべて肯定的であるということである。①及び②については例を挙げることは至って簡単である。

Example 1. 図20は plane connex $\mathcal{C}$ を与えるが，その division space $\mathcal{C}^{\pm}$ は free connex から得られるいかなるものとも同型でない。

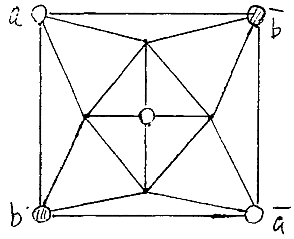


図20

——— 証明 ———

$\mathcal{C}$ においては $\mathcal{X}^+(\mathfrak{d}) = \mathfrak{b} \iff \mathfrak{d}(\mathfrak{b}) \supset U_a$ 又は $\mathfrak{d}(\mathfrak{b}) \supset U_{\bar a}$ であるが，$\mathcal{C}$ が $\mathcal{C}' = (X ; \mathfrak{p}, \Phi')$ なる free connex と同型であれば，$U_a \ni x_1, y_1$，$U_{\bar a} \ni x_2, y_2$ を適当にとって，

$$\Phi'_{(\mathfrak{m})}(b, x_i) = \Phi'_{(\mathfrak{m})}(x_i, y_i) = \Phi'(y_i, \bar b) = 1$$

$$\Phi'_{(\mathfrak{m})}(b, y_i) = \Phi'_{(\mathfrak{m})}(x_i, \bar b) = 0$$

となる．以下，次が成り立っても成り立たなくても矛盾を導き出すことができる．

$$\Phi'_{(\mathfrak{m})}(x_1, y_2) = \Phi'_{(\mathfrak{m})}(x_2, y_1) = 0.$$

Example 2. $|X| = 3$ なる集合 X に，下のような $\mathcal{X}^+$ を定めて $\mathcal{D}^+ = (X ; \mathcal{X}^+)$ を作ると，connex から得られないものができる．

$$\mathcal{X}^+(\mathfrak{d}) = \mathfrak{m} \iff |\mathfrak{d}(\mathfrak{m})| \geq 2$$

——— 証明 ———

もし $|U_a| \geq 2$ なら $\mathfrak{d}(a) = U_a$ なる $\mathfrak{d}$ に対し $\mathcal{X}^+(\mathfrak{d}) = 1$ だから，"$\mathcal{C}^+$ が nontrivial" と併せ $U_a \cap U_{\bar a} \neq \phi$ となり矛盾．$|U_a| \leq 1$ なら $\mathfrak{d}(a) = X - U_a$ なる $\mathfrak{d}$ に対し $\mathcal{X}^+(\mathfrak{d}) = 1$ となり nontrivial に反する．

§6. Division game

Definition. $\mathcal{D}^* = (X ; \mathcal{X}^*)$ を division space とするとき、次のような写像 o, ∂ をそれぞれ order, initial condition という。

$$o : \{1, 2, \cdots\cdots, |X|\} \longrightarrow \mathbb{M}$$

$$\partial : \mathbb{M} \longrightarrow 2^X \quad \text{s.t.} \quad \bigcap_{m \in \mathbb{M}} \partial(m) = \phi .$$

o が order, $i, j \in \mathbb{Z}^+$ が $i+j \leqq |X|$ をみたすとき次のように、写像 $o_i^j : \{1, 2, \cdots, |X|-i-j\} \longrightarrow \mathbb{M}$ を定める。但し i, j は 0 のとき書くことを省略する。

$$o_i^j(n) = o(n+j)$$

Definition. 自然数 N, order o について次のことばを導入する。

1). N^+-periodic $\longleftrightarrow$ $^\exists m \in \mathbb{M}$ s.t.

$$o(n) = m \longleftrightarrow n \equiv 1, \cdots, N \mod 2N$$

2). N^--periodic $\longleftrightarrow$ $^\exists m \in \mathbb{M}$ s.t.

$$o(n) = m \longleftrightarrow |X| - n \equiv 1, \cdots, N \mod 2N$$

3). $(\pm)$-periodic $\longleftrightarrow$ $^\exists N$ s.t. $N^\pm$-periodic

4). alternate $\longleftrightarrow$ $1^\pm$-periodic

Definition. order $\mathcal{O}$ について次の用語を導入する.

1). $\mathfrak{M}^+(\mathcal{O}) = \mathcal{O}(1)$ …… starter (先手)

2). $\mathfrak{M}^-(\mathcal{O}) = \mathcal{O}(|X|)$ …… anchor (終手)

∂_1, ∂_2 を $\bigcap_i \left(\bigcup_{\mathfrak{m}} \partial_i(\mathfrak{m}) \right) = \phi$ なる initial condition の組とするとき $\partial_1 + \partial_2$ なる initial condition を次のように定める.

$$\partial_1 + \partial_2(\mathfrak{m}) = \bigcup_i \partial_i(\mathfrak{m}) \qquad \forall \mathfrak{m} \in \mathbb{M}$$

また $\mathfrak{S} \subset X$, $\mathfrak{m} \in \mathbb{M}$ に対し initial condition $\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{m}$ を次のように定める. ($\mathfrak{S} = \{x\}$ のとき $x \cdot \mathfrak{m}$ とかく).

$$\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{m}(\mathfrak{m}) = \{x\}$$

$$\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{m}(\hat{\mathfrak{m}}) = \phi$$

$\mathcal{D}^*$ を division space, ∂ を initial condition とする. このとき $\mathcal{D}_\partial^*$ を次のように定める.

$$X_\partial = X - \bigcup_{\mathfrak{m}} \partial(\mathfrak{m})$$

$$\mathcal{X}_\partial^*(\mathfrak{D}_\partial) = \mathcal{X}^*(\mathfrak{D}_\partial + \partial) \qquad \forall \mathfrak{D}_\partial \in \mathfrak{D}_\partial$$

Definition. $\mathcal{D}^*$ を division space, $\mathcal{O}$ を order とするとき「"n 手を $\mathcal{O}(n)$ が着手する" という約束で X の点を占め合い, 最終的に得られた分割状態 $\mathfrak{D}$ に対し $\mathcal{X}^*(\mathfrak{D})$ を勝者とする」というゲームを $\mathcal{D}^*$ と order $\mathcal{O}$ の division game といい $\mathcal{D}^*(\mathcal{O})$ とかく. $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_\partial^*$ に対し order $\mathcal{O}'$ のゲームを $\mathcal{D}_\partial^*(\mathcal{O}')$ とかく.

有限ゲームの一般論から，$\mathcal{D}_{\partial}^{*}(\theta')$ は"必勝者"……常に最善を尽せば勝つことのできる者……を持つゲームである．これによって次の定義が得られる．

Definition.

$$\mu^{+}_{\mathcal{D}^*} : \{\theta\} \longrightarrow M$$

$$\theta \longmapsto \mathcal{D}^*(\theta) \text{ の必勝者}$$

$$\mu^{-}_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \widehat{\mu^{+}_{\mathcal{D}^*}(\theta)}$$

Lemma. $X \neq \phi$ のとき次のことがらがわかる．

1). $\mu^{+}_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \mathfrak{M}^{+}(\theta) \iff \exists x \in X \quad \mu^{+}_{\mathcal{D}^*_{x\cdot\theta(1)}}(\theta') = \mathfrak{M}^{+}(\theta)$

2). $\mu^{-}_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \mathfrak{M}^{-}(\theta) \Longleftarrow \exists x \in X \quad \mu^{-}_{\mathcal{D}^*_{x\cdot\theta(|x|)}}(\theta_1) = \mathfrak{M}^{-}(\theta)$

3). regular connex $\mathcal{D}^{+}$, misère connex $\mathcal{D}^{-}$ に対しては次のことがらが成り立つ．ここに initial conditions ∂, ∂' は

$$\partial(\mathfrak{M}) \supset \partial'(\mathfrak{M}), \quad \partial(\hat{\mathfrak{M}}) \subset \partial'(\hat{\mathfrak{M}})$$

をみたすとする．

$$\mu^{+}_{\mathcal{D}^{+}_{\partial'}}(\theta_{|\partial'|}) = \mathfrak{M} \Rightarrow \mu^{+}_{\mathcal{D}^{+}_{\partial}}(\theta_{|\partial|}) = \mathfrak{M}$$

$$\mu^{-}_{\mathcal{D}^{-}_{\partial'}}(\theta^{|\partial'|}) = \hat{\mathfrak{M}} \Rightarrow \mu^{-}_{\mathcal{D}^{-}_{\partial}}(\theta^{|\partial|}) = \hat{\mathfrak{M}}$$

但し $|\partial| = |\bigcup_{\mathfrak{M}} \partial(\mathfrak{M})|$，$|\partial'| = |\bigcup_{\mathfrak{M}} \partial'(\mathfrak{M})|$ とする．

この Lemma の 2) の式を"一般的に $\Longleftrightarrow$ という形にする"ことはできない。もしそれができれば，order θ に対し $\check{\theta}$ を

$$\check{\theta}(n) = \theta(|x|-n)$$

とおくとき

$$\mu^+_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \mu^-_{\tilde{\mathcal{D}}^*}(\check{\theta})$$

という驚異的な結論を induction で得ることができるが，それには次の反例がある．

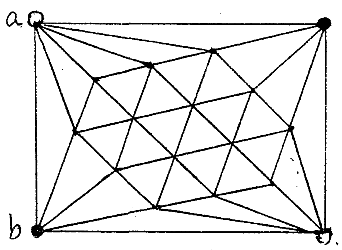


図21

Example. 図21から得られる connex $\mathcal{C}$ において $\mathcal{C}^{\pm}$ を考える．今 θ を $\theta(n)=a \Longleftrightarrow n\equiv 0 \bmod 2$ により定めると，次の式が成り立つ（証明は割愛する）．

$$\mu^+_{\mathcal{C}^+}(\theta) = \mu^+_{\mathcal{C}^-}(\check{\theta}) = a.$$

この例は $\mathcal{C}$ が free connex，θ が alternate order である為，上の命題 $\mu^+_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \mu^-_{\tilde{\mathcal{D}}^*}(\check{\theta})$ に本質的な欠陥のあることを示している。しかし misère における anchor の不利が regular における starter の有利さを凌ぐものではないかという疑問が残る．我々は $\mu^+_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \mu^-_{\tilde{\mathcal{D}}^*}(\check{\theta})$ の為に free connex と ~~が~~ alternate order が無力であることを知ったが，別な条件のもとに，次の結論を得ることができる．

Theorem 3. $\mathcal{D}^{\pm}$ を $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}^{\pm}) \supsetneq \mathrm{Aut}_{\mathbb{M}\mathbb{L}}(\mathcal{D}^{\pm})$ なる division space, $\mathcal{O}$ を $(\pm)$-periodic order とする。このとき次の関係が成り立つ。ここに $\pm$ は一斉に同じ符号をとるものとする。

$$\mu^{\pm}_{\mathcal{D}^{\pm}}(\mathcal{O}) = \mathfrak{m}^{\pm}(\mathcal{O}),$$

——— 証明概要 ———

まず $\mathrm{Aut}(\mathcal{D}^{\pm}) - \mathrm{Aut}_{\mathbb{M}\mathbb{L}}(\mathcal{D}^{\pm}) \ni \gamma$ が与えられているとしよう。このことから $|X| \neq 0$ なることがわかる。今，$d \geqq 0$, $0 < r \leq N$ なる d. r により $|X| = \pm Nd + r$ と表す。これから $(+)$ の場合と $(-)$ の場合，$r \leq N$ の場合と $r > N$ の場合 のあわせて四つの場合に分けて，背理法に従って証明しよう。[redacted]に initial condition ∂ が $\mu^{+}_{\mathcal{D}^{\pm}_{\partial}}(\mathcal{O}^{|\partial|})$ に与える必勝法すなわち着手点の集合を S_{∂} で表す。

$(+)$ の場合，今 $\mu_{\mathcal{D}^{+}}(\mathcal{O}) = \mathfrak{m}^{+}(\mathcal{O}) = a$ とする。

i). $r \leq N$ の場合，a は与えられた各局面 ∂ に対し次の方針に従って帰納的に打つことができる。まず，最後の r コ以外では ∂ に対して次のような ∂' が存在する（ように帰納的に打つ）。

$$\partial'(a) = \partial(a), \quad \partial'(b) \supset \partial(b), \quad |\partial'| = |\partial| + N$$

$$\mu^{+}_{\mathcal{D}^{+}_{\partial'}}(\mathcal{O}^{|\partial'|}) = a$$

~~なぜなら~~ order $\mathcal{O}'$ を $\mathcal{O}'(n) = \mathcal{O}(n+N)$ とおくと

最後のℓ以外だから N^+-periodic である．このとき $S_{\partial'}$ に打つようにすればよい．最後のℓコに関しては残りのℓコを打つようにする．

iii). $\ell > N$ の場合，∂ に対して常に次のような ∂' が存在する．

$$\partial'(a)=\partial(a),\quad \partial'(b)>\partial(b),\quad |\partial'|=|\partial|+N$$

$$\mu^+_{\mathcal{D}^+_{\partial'}}(e^{|\partial'|}) = a.$$

最後の N コ以外は $S_{\partial'}$ に打つようにする．最後の N コは $S_{\partial'}$（$\ell-N$ コ）と残りのうちから任意に $2N-\ell$ コ打つようにすればよい．

(−)の場合，今 $\mu^-_{\mathcal{D}^-}(e) = \hat{\mathfrak{M}}^-(e) = a$ とする．最初の節以外は ∂ が与えられた時は，次のような ∂' が存在する．

$$\partial'(b)<\partial(b),\quad |\partial'|=|\partial|-N$$

$$\mu^+_{\mathcal{D}^-_{\partial'}}(e^{|\partial'|}) = a.$$

最初の節については，二つの場合に分ける．

i). $\ell \leqq N$ の場合，$\partial(a)=\partial(b)=\phi$ なる ∂ に対する S_∂（ℓコ）のうち打てるものを打ち，N コのうちの残りを任意に打つ。

ii) $\ell > N$ の場合，任意に $\ell-N$ コ打てばよい．

これらの方針がそれぞれの場合に可能なことは ∂' の存在

及び，$\mathcal{O}$ が(±)-periodic であることからわかる．またこれが $\mathfrak{b}$ の必勝法を逆用するものであることは，$\mathcal{D}^{\pm}$ がそれぞれ，regular，misère であることから知れる．これで証明の筋道は明らかである．

上の証明において(±)-periodic は本質的である．仮に次のような order にまで定理を拡張すると(+)については下記の反例を得る．

(+)-periodic ⟹ $\mathfrak{a}$ が先行的 i.e. $|\mathcal{O}_i^{-1}(\mathfrak{a})| \geqq |\mathcal{O}_i^{-1}(\mathfrak{b})| \quad \forall i$

(−)-periodic ⟹ $\mathfrak{b}$ が残務処理的 i.e. $|(\mathcal{O}^j)^{-1}(\mathfrak{a})| \leqq |(\mathcal{O}^j)^{-1}(\mathfrak{b})| \quad \forall j$

Example. $\mathcal{D}^{+} = \mathcal{H}_4^{+}$ とし $\mathcal{O}$ を次のように定める．

$$\mathcal{O}^{-1}(\mathfrak{a}) = \{1, 2, 3 ; 7, 9, 11, 13, 15\}$$

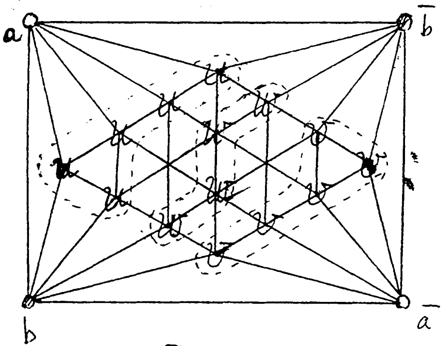


図 22

この場合 $\mathfrak{a}$ は先行的である．しかし第4, 5, 6手目を打つのが $\mathfrak{b}$ であること，第7手目からは交互に着手することに注意すれば，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{v}$ で表わされる点，$\mathfrak{v}'$ で表で表わされる点に，それぞれ少くとも一つ打たねばならない．従って残りの場所には高々1個しか打てないので，$\mathfrak{v}''$ で表わされる点に一つ打たねばならないことがわかる．以下 $\mu^{+}_{\mathcal{D}^{+}}(\mathcal{O}) = \widehat{\mathfrak{m}}^{+}(\mathcal{O}) = \mathfrak{b}$ であ

ることを各自確かめられたい（ひをどこにとるかで分類）．(一) については，まだ反例は挙がっていない．もしかすると"残務処理者は不利である"という因縁じみた命題が成立しているかも知れない．そこに単なる irregular でない "misère" の宿命があるような気がしないでもない．尚 |X| とそれに対する order を固定するとき，θ が先行的，残務処理的でない限り，それぞれ $\mathcal{D}^+$, $\mathcal{D}^-$ で $\mu^{\pm}_{\mathcal{D}^{\pm}}(\theta) = \widehat{m}^{\pm}(\theta)$ となるものが存在することは容易である（§5 の最後の例参照）．

Definition. $\mathcal{D}^*$ を division space，θ を order とするとき，次の集合を定義する．

$$Z^+_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \{ S \subset X \mid |S| = N_+ ,\ \mu^+_{\mathcal{D}^*}(S \cdot \theta_{(1)}) = m^+(\theta) \}$$

$$Z^-_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \{ S \subset X \mid |S| = N_- ,\ \mu^-_{\mathcal{D}^*}(S \cdot \theta_{(|X|)}) = m^-(\theta) \}$$

ここに

$$N_+ = \max\{0,\ i \mid \theta_{(j)} = \theta_{(1)} \quad \text{for } \forall j \leqq i \}$$

$$N_- = \max\{0,\ i \mid \theta_{(j)} = \theta_{(|X|)} \quad \text{for } \forall j \geqq |X| - i \}$$

とする．

Remark. $|X| \neq 0$ なるゲームでは

$$Z^+_{\mathcal{D}^*}(\theta) \neq \phi \iff \mu^+_{\mathcal{D}^*}(\theta) = m^+(\theta)$$

$$Z^-_{\mathcal{D}^*}(\theta) \neq \phi \Longrightarrow \mu^-_{\mathcal{D}^*}(\theta) = m^-(\theta).$$

§ 7. Hex $\mathcal{H}_n$

Hex $\mathcal{H}_n$ $(n \geqq 1)$ は initial plane convex で，Proposition (4.3) にみた通り normal である．よって次のことがわかる．

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{I\!I}}(\mathcal{H}_n) = \{1\}$$

$$\{1\} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{X,\mathrm{M\!I}}(\mathcal{H}_n) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_n) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_n^{\pm}) \longrightarrow \{1\}$$

$n=1$	$\langle \tau_{p_a} \rangle \oplus \langle \tau_{p_b} \rangle$	$D_{2\cdot 4}$	$\{\wedge\}$
$n \geqq 2$	$\{1\}$	$\{\sigma\tau_{p_a}\} \oplus \langle \sigma\tau_{p_b} \rangle$	$\langle \quad \rangle \oplus \langle \quad \rangle$

$$\{1\} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{X,\mathrm{M\!I}}(\mathcal{H}_n) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{M\!I}}(\mathcal{H}_n) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{M\!I}}(\mathcal{H}_n^{\pm}) \longrightarrow \{1\}$$

$n=1$	$\langle \tau_{p_a} \rangle \oplus \langle \tau_{p_b} \rangle$	$\{1\}$
$n \geqq 2$	$\langle \iota \rangle$	$\langle \iota \rangle$

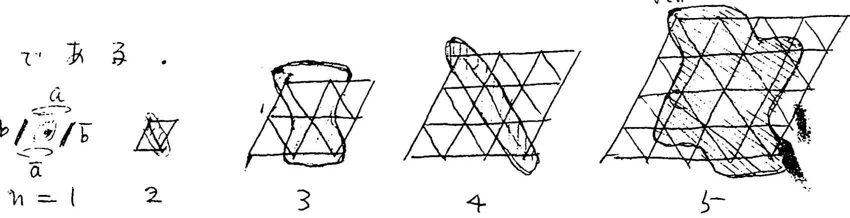
ここに $\iota = \sigma^2$ である．従って $N^{\pm}$-periodic order $\mathcal{O}$ においては

$$\mu^{\pm}_{\mathcal{H}_n^{\pm}}(\mathcal{O}) = m^{\pm}(\mathcal{O})$$

である，以下この節では alternate order $\mathcal{O}$ において $Z^{+}_{\mathcal{H}_n^{+}}(\mathcal{O})$ を考察する．

Example　$\mathcal{O}^{+}(a) = \{\text{even}\}$ とするとき $Z^{+}_{\mathcal{H}_n^{+}}(\mathcal{O})$ は次の図の斜線部分である．

図23



$n=1$　2　3　4　5　6

$Z^{+} \supsetneqq \Delta$

盤の記載は Hex の慣例にならった．Δ は対角線を表す．

Conjecture.　alternate order σ に対して

1)　$Z^{+}_{\mathcal{H}_n^{+}}(\sigma) \supseteq \Delta$

2).　$Z^{+}_{\mathcal{H}_n^{+}}(\sigma) = \Delta \Longleftrightarrow n : 2$巾

このconjectureについて，まず1)は相当信頼できるが証明の手がかりは皆目ない．2).については $n=2^3$ のとき正しそうな正しくなさそうな，どちらかといえば実験的には非観的な結果が多いが明確には分っていない．$n=2^3$ は解明し得る限界あたりにあるようである．一般に，$Z^{+}_{\mathcal{H}_n^{+}}(\sigma)-\Delta$ がどれくらい大きいか（$|X|$に対し相対的に）ということと，nの素因数分解との関係も注目される．その意味では $n=6$，7（特に6）の場合を完全に決定することも興味を引く問題である．

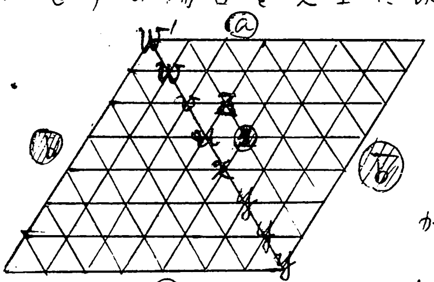


図24

実際問題として $n=2^3$ では①が有力点である．$Z^{+}_{\mathcal{H}_8^{+}}(\sigma)=\Delta$ かどうかのみを知るには a が①を対角線上で妨げることができるかどうかが焦点となる．a が x に打てば v で，y のどれかに打てば z で b が必勝となることは腕に自信のある向きは確認していただきたい．また w' は論理的に w に劣ることもわかる．従って u, v, w のうちに a の対策があれば最有力点①は Z^{+} に属さないし，対策がなければ $Z^{+} \supsetneq \Delta$ が確定する．

§8. 一様な勝ち方

以下本節では $|X| = \text{even}$ なる division space $\mathcal{D}^*$ を一つ fix する。

Definition. 固定点をもたない involution $f : X \longrightarrow X$ (i.e. $f^2 = i_X$, $f(p) \neq 1_X(p)\ {}^\forall p \in X$) が $\mathfrak{M}_0$ の uniform winning correspondence であるとは下の条件をみたすことをいい、その全体を $\mathcal{U}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{D}^*)$ で表す。

$$^\forall \mathfrak{d} \in \mathfrak{D} \text{ s.t. } f(\mathfrak{d}(\mathfrak{M}_0)) = \mathfrak{d}(\hat{\mathfrak{M}}_0) \Longrightarrow \chi(\mathfrak{d}) = \mathfrak{M}_0 .$$

Remark
$$\mathcal{U}_{\hat{\mathfrak{M}}_0}(\hat{\mathcal{D}}^*) = \mathcal{U}_{\mathfrak{M}_0}(\mathcal{D}^*)$$
$$\mathcal{U}_{\mathfrak{M}_0}(\mathcal{D}^*) \neq \phi \Longrightarrow Z^+_{\mathcal{D}^*}(\vartheta) \neq \phi \qquad {}^\forall \vartheta : \text{alternate}$$

Definition. $\mathrm{Aut}_{\mathrm{M}\amalg}(\mathcal{D}^*) \supset G$ に対し $\mathcal{U}_{\mathfrak{M}_0}(\mathcal{D}^*) \ni f$ が G-symmetric であるとは

$$f \circ \gamma = \gamma \circ f \qquad {}^\forall \gamma \in G$$

なることをいう。特に $G = \mathrm{Aut}_{\mathrm{M}\amalg}(\mathcal{D}^*)$ のとき単に symmetric であるという。

以下特に断らない限り regular division space $\mathcal{D}^+$ に対する議論を進める (misère についても同様のことが考えられる)。また、ϑ は alternate とする。

Definition. $f' : X \longrightarrow X$ を写像とする．このとき bijection $\lambda : \{1, \cdots, |X|\} \longrightarrow X$ が $\mathfrak{m}_0$ の f'-variation であるとは $\sigma(1) = \hat{\mathfrak{m}}_0$ なる alternati order σ に対し

$$\lambda(2n) = f' \circ \lambda(2n-1) \quad \text{if} \quad f' \circ \lambda(2n-1) \neq \lambda(k) \quad {}^\forall k < 2n$$

なることをいう．

Definition. f' が性質 $(\mathcal{U}_{\mathfrak{m}_0})$ をもつとは，すべての f'-variation λ が次の性質をみたすことをいう．

$$\chi^+(\mathfrak{d}) = \mathfrak{m}_0$$

ここに $\mathfrak{d}$ は次の式で与えられる．

$$\mathfrak{d}(\mathfrak{m}) = \lambda(\sigma^{-1}(\mathfrak{m})).$$

Lemma. ${}^\forall f \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}_0}$ は性質 $(\mathcal{U}_{\mathfrak{m}_0})$ をもつ．

Proposition (8.1). f' が性質 $(\mathcal{U}_{\mathfrak{m}_0})$ をもつとする．$L(x) = \underline{\lim}_n \{f'^n(x)\}$，$l(x) = |L(x)|$ とおくとき次のような $f \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}_0}$ が存在する．

$${}^\forall x \mid l(x) \geqq 2 \Longrightarrow {}^\exists u, v \in L(x) \quad \text{s.t} \quad f(u) = v$$

証明は略する．上のような f', f の関係を $f' \Longrightarrow f$ で表すことにする．

Definition. $f \in \sqcup\Gamma_{\mathfrak{M}_c}$ が exact であるとは $f' \Longrightarrow f$ なる f' が f のみであることをいう（$f \Longrightarrow f$ は常に成り立つ）.

Remark $f \in \sqcup\Gamma_{\mathfrak{M}_c}$, $x \in X$ に対し f_x を次のように定める.

$$f_x(u) = \begin{cases} x & u = x \cdot f(x) \\ f(u) & \text{その他}. \end{cases}$$

このとき各 f_x に対し f_x-variation λ で $x^+(b) = \hat{\mathfrak{M}}_c$ なるもの（$b(\mathfrak{M}) = \lambda(b^{-1}(\mathfrak{M}))$ なる b）が存在することと f が exact であることは同値である.

§9. $\mathcal{H}_{n-1,n}$

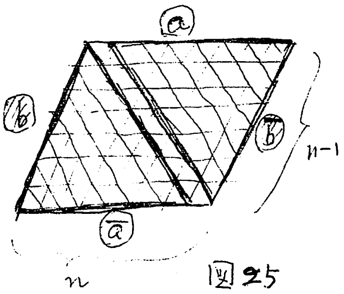


図25

$n \geq 1$ に対し左図のような盤を $\mathcal{H}_{n-1\,n}$ と書く（$n=1$ のとき $X = a$ とみなす）. 自己同型群については次の表が得られる.

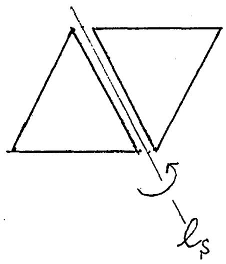
$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{P}}(\mathcal{H}_{n-1\,n}) = \{1\}$$

$$\{1\} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{X\,\mathbb{M}}(\mathcal{H}_{n-1\,n}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{M}}(\mathcal{H}_{n-1\,n}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_{n-1\,n}^{\pm}) \longrightarrow \{1\}$$

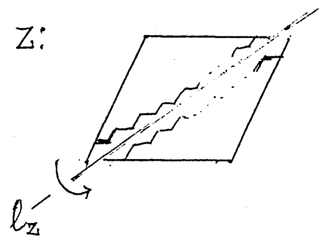
	$\mathrm{Aut}_{X\,\mathbb{M}}(\mathcal{H}_{n-1\,n})$	$\mathrm{Aut}_{\mathbb{M}}(\mathcal{H}_{n-1\,n})$	$\mathrm{Aut}_{\mathbb{M}}(\mathcal{H}_{n-1\,n}^{\pm})$
$n=1$	$\langle \tau_{p_a} \rangle \oplus \langle \tau_{p_b} \rangle$	$\langle \tau_{p_a} \rangle \oplus \langle \tau_{p_b} \rangle$	$\{1\}$
$n=2$	$\langle \tau_{p_b} \rangle$	$\langle \tau_{p_a} \rangle \oplus \langle \tau_{p_b} \rangle$	$\langle [\iota] \rangle$
$n=3$	$\{1\}$	$\langle \iota \rangle$	$\langle \iota \rangle$

Theorem 4. $\Gamma_a(\mathcal{H}_{n-1n^+})$ は次の S, S_∇, Z の三つの元を持つ，但し $n=1,2$ のときは $S=Z=S_\nabla$，$n=3$ のときは $Z=S_\nabla \neq S$，$n\geqq 4$ のときは三つ共相異る．

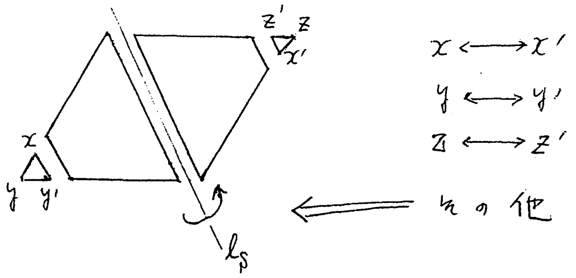
S:



Z:



S_∇



——— 証明方針 ———

$f'=S$ 又は Z に対して先ず考えよう．$\chi^+(\mathfrak{b})=\mathbf{b}$ なる f'-variation があったとしよう．このとき $\mathfrak{h}(\mathbf{b})$ 内に $\mathbf{b}$ から $\bar{\mathbf{b}}$ への path が生じる筈である．今，そういう path のうちで最短なものを $\mathbf{b}=u_0, u_1, \cdots, u_i, u_{i+1}, \cdots\cdots, u_m=\bar{\mathbf{b}}$ とし，$u_i\ u_{i+1}$ においてはじめて $l_{f'}$ と交わるとしよう（$\mathbf{b}$ から始めて）．f' が involution（固定点なし）であるから $f'(\{u_0, \cdots, u_i\})$ は $\mathbf{a}$ の path

であり，且つ $\{u_0,\cdots,u_i\}$ と交らない．また u_i と $f(u_i)$ は1単体を共有している．従って $\{u_0,\cdots,u_i,f(u_i)\cdots f(u_0)\}$ は $\mathbf{b}$ から $\mathbf{a}$ への path であり，u_{i+1} はこの中にとじ込められる．即ち $X\cup\{\bar{\mathbf{b}}\}-\{u_1,\cdots,u_i,f(u_i)\cdots,f(u_1)\}$ に於いて u_{i+1} と $\bar{\mathbf{b}}$ は別の連結成分に属する．従って Jordan の曲線定理により，path $u_{i+1},\cdots,\bar{\mathbf{b}}$ は $\{u_1,\cdots,u_i,f(u_i)\cdots,f(u_1)\}$ と交わらざるを得ない．従って仮定に反する．

$f'=S_D$ のときは $\{x,x',y,y',z,z'\}$ がいかに分解されるかに注意して S に帰着させればよい．

Proposition (9.1)　$n\leqq 6$ では次の表が得られる．

n	1	2	3	4	5	6
$\lvert L\Gamma_{a}(\mathcal{H}_{n-1,n}^{+})\rvert$	1	1	2	3	3	3

証明は割愛する（退屈を催すだけだから）．

Remark.　S, Z, S_D は各 n について一般に symmetric 且つ exact である．

$\lvert L\Gamma_{a}(\mathcal{H}_{n-1,n}^{+})\rvert$ は $n\geqq 6$ でも3であるかどうかということが考えられるがそれには次の Proposition 以上は分っていない．

Proposition (9.2)

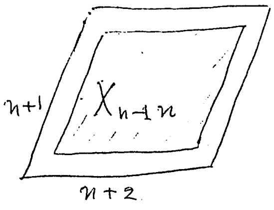


図 26

図26のように $X_{n-1\,n} \hookrightarrow X_{n-1\,n+2}$ なる embedding を作る．今，$|\mathfrak{G}_a(\mathcal{H}_{n-1\,n}^{+})| = 3$ なる n に対しては次の式が成り立つ．

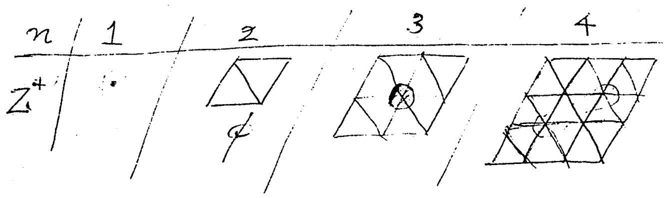
$$\{f \in \mathfrak{G}_a(\mathcal{H}_{n+1\,n+2}^{+}) \mid f(X_{n-1\,n}) = X_{n-1\,n}\}$$
$$= \{S, S_D, Z\}.$$

証明は，ここに挙げないので各自確かめられたい．

§10. あとがき

以上のようにHexは connex, division game へと拡張されたが，競技の対象としておもしろいものは余り多くない．唯Hexは"原理的に先手必勝"が判っているという"いやみ"……大きい盤では必勝法を知ることは事実上できないが……があるので，それを気分的に解消する為に置き石，即ち initial condition が考えられた．尤も，どういじるにしても"どちらかが必勝"という原理をかえる訳ではない．興味深い置き石としては，"後手が対角線上でない方の両隅にあらかじめ置いてから始める($n=1$では対角線)"というのが有り，$n=1, 2, 4$では後手，3, 5, 6では先手の必勝が判っている．以下$n \geqq 7$でも先手に有利であろうと思えるが，$n=6$ですら割合最近まで後手必勝と錯覚していたものである．

次なる工夫は $\boxed{\text{order}}$ であるが，これについては"先手の第一手のみ1つであとは互いに2つづつ"というのが有力である．これについてのZ^+は次の表の通りである．



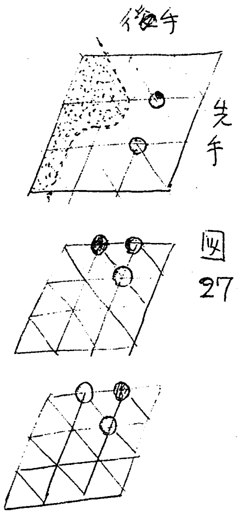


図27

$n=4$については図27を参照されたい．この場合のZ^+は意外といえば意外であったが，それについて論じるほどの感覚がまだないという方が当を得ていよう．このorderについて$n \geqq 5$に至ってはZ^+に入りそうな有力な点を想像することさえ困難であるし，実際的に，ゲーム展開は通常のHexとは全く趣きを異にする．

お気づきの向きもあろうが，HexからConnexまでは拡張そのものであるが，Division spaceは少し違うのである．即ち，Hexでは全部の石を打つ以前に鎖ができて勝負がつくことが多い．この点を誇張すれば，"100手以内はregular以降はmisère"というようなルールを作ることもできないことはない（もちろんDivision gameではない）．Connexのゲーム化には，未だにそのような余裕が少し残っている．

最後に，本稿では"Conjecture"とする勇気がなかったが，次

のような命題が考えられる．即ち，$\mathcal{D}^+$: regular，$\mathcal{C}$: N^+-periodic に対し

$$\mu^+_{\mathcal{D}^+}(\mathcal{C}) = \mathfrak{M}^+(\mathcal{C}) \Longrightarrow \mu^-_{\mathcal{D}^+}(\check{\mathcal{C}}) = \mathfrak{M}^-(\check{\mathcal{C}})$$

が成立するのではないかということである．この種の"宿命"についての命題に対してデータを揃えているわけではないが，alternate order で $\mathcal{H}_n^-$ を実際にplay してみると，"anchor の重み"が misère においていかに"misère"に作用するかを感じるものである．証明は絶望的であるが，反例その他の指摘があれば幸いとするところである．

参考文献

[1] 米田信夫　ナッシュ・ゲームのこと

数学セミナー　1965・8・2

§　　訂正と追加

訂正　---- No. 13 の Definition の図式を次のようにする.

$$
\begin{tikzcd}
F_{\mathfrak{D}} : \mathfrak{D} \arrow[r] \arrow[d, "\chi^*"'] & \mathfrak{D}' \arrow[d, "\chi'^*"] \\
\operatorname{sgn} F : \mathbb{M} \arrow[r] & \mathbb{M}
\end{tikzcd}
$$

ここに $F_{\mathfrak{D}}$ は次のように与えられる.

$$F_{\mathfrak{D}}(D)(\mathfrak{m}) = f(D(\mathfrak{m}^{\operatorname{sgn} F}))$$

追加.　$\mathfrak{D}^*$ を div sp, $\mathcal{O}$ を order とする. 今 $\mathcal{O}_{\hat{i}}$, $\mathcal{O}^{i}$ に対して次の Propositions を得る. ここに $\mathcal{O}_{\hat{i}}$, $\mathcal{O}^{i}$ は

$$\mathcal{O}_{\hat{i}}(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n) & n \neq i \\ \widehat{\mathcal{O}(i)} & n = i \end{cases}$$

$$\mathcal{O}^{i}(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n) & n < i \\ \mathcal{O}(|x|) & n = i \\ \mathcal{O}(n-1) & n > i \end{cases}$$

によって与えられる.

Proposition (±)　$\mathfrak{D}^*$ が $\mathfrak{D}^{\pm}$ のとき

$$\mu^{\pm}_{\mathfrak{D}^{\pm}}(\mathcal{O}_{\hat{i}}) = \mathcal{O}(i) \Longrightarrow \mu^{\pm}_{\mathfrak{D}^{\pm}}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}(i)$$

ここに複号は同順である.

Proposition (*)

$$\mu^+_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \theta(|X|) \Longrightarrow \mu^+_{\mathcal{D}^*}(\theta^i) = \theta^i(i) = \theta(|X|).$$

Corollary. $\mu^+_{\mathcal{D}^*}(\theta^1) = \mathfrak{m}^-(\theta^1) \Longrightarrow \mu^+_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \mathfrak{m}^+(\theta)$

即ち $\mu^-_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \mathfrak{m}^+(\theta) \Longrightarrow \mu^-_{\mathcal{D}^*}(\theta^1) = \mathfrak{m}^-(\theta^1)$

これらの証明は Theorem 4 のより簡単である．またこれらは Theorem 4 を導くに十分である．我々は更に次の Theorem を得るが上の Propositions と同様に証明を割愛する．

Theorem 5. $\mathcal{D}^*$ を $\mathrm{Aut}\,\mathcal{D}^* \supsetneq \mathrm{Aut}_{PL}\,\mathcal{D}^*$ なる div sp，N を自然数とする．今 $|X| \equiv 0 \mod 2N$ のとき $N^{\pm}$-periodic order θ (i.e. N^--periodic) において

$$\mu^+_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \mathfrak{m}^+(\theta)$$

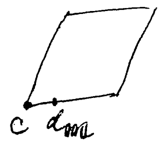
即ち

$$\mu^-_{\mathcal{D}^*}(\theta) = \mathfrak{m}^-(\theta)$$

である．

最後に，最近入手した文献[2]によって，次のことが判明した．

Hex board の 60° の隅を c とおく。W の陣地に沿った c のとなりの点を d_{W} とおくと



1). $n > 1$ で θ : alternate なら $Z^{+}_{\mathcal{H}_n^{+}} \not\ni c$

……… もし $Z^{+}_{\mathcal{H}_n^{+}} \ni c$ なら先手が c に打ったとき後手は $d_{\theta(2)}$ に打てば相手の必勝法を逆用できる"筈である" ことがわかる。

2). n = even で θ : alternate なら $Z^{+}_{\mathcal{H}_n^{-}} \ni c$

……… これが [2] の成果である。ここに [2] の入手は難かしい可能性があるが，注解すれば，p192 l7 における $Q(h)$ は $P(h)$ の誤りであり，h_{12} は上の d_W である。蛇足ながら [2] で使われる "Position" ということばは石が配置された状態……局面を表している。

最後に，ここであげた記号はいく分，変更の可能性があることを断っておく。

参考文献

[2] Ronald Evans　*A winning opening in reverse hex*
J. Recreational Mathematics 7 No.3
Summer 1974.